

LİSE ÖĞRENCİLERİNİN RASYONEL DENKLEM ÇÖZÜMLERİNDE KAVRAM YANILGILARI VE HATALARI

Dr. Alattin Ural
Mehmet Akif Üniversitesi

Özet

Bu çalışmada, öğrencilerin rasyonel denklemleri çözme yöntemlerini, hatalarını ve kavram yanlışlarını belirlemek amaçlanmıştır. Ankara’da bir Anadolu lisesinin tesadüfi belirlenen iki onuncu ve bir onbirinci sınıfından 86 öğrenci araştırmaya alınmıştır. Öğrencilerin tipik rasyonel denklem çözümlerinde yapabilecekleri, hata ve yanlışları barındırdığı düşünülen farklı yapılar dört rasyonel denklemden oluşan bir teşhis testi hazırlanmıştır. Çözümler, verilerden elde edilen bir kod şeması yoluyla kodlanmış ve betimsel analiz yapılmıştır. Öğrencilerin yaptıkları hatalar ve yanlışlar, çözüm yöntemleri çerçevesinde belirlenmiştir. Öğrencilerin bir rasyonel denklemi çözerken; içler-dışlar çarpımı, her iki tarafın pay veya payda kısımlarındaki ortak çarpanların yok edilmesi veya eşitliğin bir tarafının tamamının diğer tarafa taşınarak gerekli işlemlerin yapılması yöntemlerini kullandıkları görülmüştür. Eşitlik kavramı temelinde düşünülerek denklemin her iki yanında çarpım durumunda bulunan ortak ifadelerin yok edilerek bu ifadeyi sıfır yapan sayının rasyonel denklemin çözüm kümesine katılmaması, öne çıkan kavram yanlışları olarak tespit edilmiştir. Bir diğer yanlış ise yokluğun sıfır ile eşleştirilmesi temelinde olmuştur. Bazı öğrenciler, denklemde sadeleştirmenin sonucunda eşitliğin bir yanında geride bir ifade kalmaması durumunda sıfır yazmıştır. Rasyonel denklem çözme sürecinde yapılan en önemli hata ise, rasyonel denklemde yer alan rasyonel ifadenin paydasını sıfır yapan sayının çözüm kümesi dışında bırakılmamasından kaynaklanmaktadır. Diğer taraftan, rasyonel denklem çözme sürecinde 2. veya 3. dereceden denklem çözümleri verilen rasyonel denklemin çözülmesini zorlaştıran bir faktör olarak belirlenmiştir. Örneğin, içler dışlar çarpımı yönteminin kullanılması durumunda ortaya çıkabilecek 3. dereceden denklemin çözülmemesi, verilen rasyonel denklemin çözülememesini ortaya çıkarmıştır.

Anahtar Sözcükler

Rasyonel denklemler, Kavram Yanlışları, Hatalar.

HIGH SCHOOL STUDENTS' MISCONCEPTIONS AND ERRORS IN SOLVING RATIONAL EQUATION

Dr. Alattin Ural

Mehmet Akif University

Abstract

This paper has been done to determine students' solving methods of rational equations, errors and misconceptions in solving rational equations. A total of 86 students from 10th and 11th grades in Ankara were chosen randomly. Four rational equations with different forms containing general students' error and misconceptions in rational equations were prepared. Coding of solutions was done through a coding schema obtained the data and descriptive analysis was used. The students' errors and misconceptions have been determined and interpreted on the basis of their solving methods. The results showed that "cross products", "eliminating the same factors on numerator or denominator of both sides " and "moving one side of the equation to another side then multiplying by a common denominator" were common solving strategies. Solving 2nd or 3rd equations and arithmetical operations on algebraic rational expressions are the difficulties encountered. On the basis of perception of equality concept, by eliminating the same factors on numerators of both sides and not putting the numbers making the denominator zero into solution were common misconception. Another misconception was on the basis of matching the absence with zero. Some students have written zero in the case of nothing remained in the one side of the equation in the result of eliminating the same factors in the equation. The most important error in the process of solving rational equation has been arisen from not excluding the numbers making the denominator zero from the solution set. Besides, encountering a 2nd or 3rd equation in the process of solving the rational equation given has been determined a difficulty.

Keywords

Rational Equation, Errors, Misconceptions.

GİRİŞ

Denklemler, öğrencilerin çoğu tarafından yeterince anlaşılamayan önemli bir kavramdır (Laughbaum, 2003; Macgregor & Stacey, 1997a; Macgregor & Stacey, 1997b; Pope, 1994). Knuth, Alibali, McNeil, Weinberg ve Stephens (2005), cebir'i kullanma ve anlamının değişken ve denklem gibi bazı temel kavramların anlaşılmasına bağlı olduğunu, Welder (2006) öğrencilerin cebirde başarılı olabilmeleri açısından öncelikle sayılar ve nümerik işlemler, oran ve orantı, işlem önceliği, eşitlik, örüntü oluşturma, grafikler konusunda bilgili olmaları gerektiğini belirtmiştir.

Ersoy ve Erbaş (2002) öğrencilerin temel cebir, özellikle de denklem kurma ve çözmede yaşadıkları zorlukları şu üç nedene bağlamaktadır: i) Cebir' in yapısı (epistemolojik zorluk) ii) Öğrencilerin zihinsel gelişimleri ve hazır bulunuşlukları iii) Cebir' in öğretimindeki eksiklikler (didaktik zorluk). Bazzini ve Tsamir (2004), denklemlere yönelik araştırmaların genel olarak denklem kavramı, birinci dereceden bir bilinmeyenli denklemler konusundaki hatalar ve kavram yanlışları, nedenleri ve öğretim yöntemleri temelinde olduğunu belirtmiştir. Denklem çözümlerinde denklik kavramının (Kieran, 1981; Kieran & Sfard, 1999) ve bilinmeyenlerle nasıl işlem yapılacağına bilinmesi önemlidir (Fillooy & Rojano, 1989; Fillooy, Rojano, & Puig, 2008; Herscovics & Linchevsky, 1991). Yapılan araştırmalarda öğrencilerin cebirdeki harfli ifadeleri, değişken kavramını, eşitlik kavramı ve eşittir işaretini algılamada, denklem ve denklem çözümünde bir takım güçlüklerle ve kavram yanlışlarına sahip oldukları belirlenmiştir (Akkaya, 2006; Akkaya & Durmuş, 2006; Andrews, 2011; Arcavi, 2005; Bayar, 2007; Clement, Lochhead & Monk, 1981; Dede, Yalın & Argün, 2002; English & Halford, 1995; English & Warren, 1998; Erbaş, 1999; Ertekin, 2002; Herscovics & Kieran, 1980; Knuth ve diğ., 2005; Linchevski & Herscovics, 1996; Philip, 1992; Perso 1992; Payne & Squibb, 1990; Rojano & Martínez, 2009; Stacey & MacGregor, 2000; Vlassis, 2002; Wagner 1983; Warren, 2003).

Öğrencilerin cebirdeki zorluklarını araştırmak için araştırmacılar, öğrencilerin 1. dereceden cebirsel denklemleri çözme becerilerini (Koedinger & MacLaren, 1997; Stacey & MacGregor, 1999), cebirsel kavramları sözel problemlere (ve tersi) dönüştürebilmelerini (Clement, 1982; Stephens, 2003) ve basit denklemleri çözebilmelerini (McNeil & Alibali, 2004; 2005) araştırmıştır. Bu araştırmalar öğrencilerin cebirsel denklemleri çözmek için hatalı bir şekilde aritmetik yöntemlere başvurma eğiliminde olduklarını göstermiştir. Perso (1992)' ya göre öğrencilerin cebir ile ilgili kavram yanlışlarını, “harflerin cebirdeki yerini anlama”, “değişkenleri kullanma” ve “denklem çözerken cebirsel kuralları kullanma” olarak kategorize etmiştir. Dede ve diğ. (2002) cebir öğretiminde öğrencilerin zorlanmalarının nedenlerini ise “değişkenlerin farklı kullanımlarını

bilememe”, “değişkenlerin genelleme yapmadaki rolünü bilememe”, “değişkenleri yorumlayamama”, “değişkenlerle işlem yapamama” olarak ortaya koymuştur. Diğer taraftan aritmetik işlem bilgisindeki eksiklik de cebirde yaşanan zorlukların bir diğer nedenidir (Gray ve Tall, 1994; Linchevski & Livneh, 1999; Schappelle ve Philipp, 1999; Slavits, 1999).

Cebirsel muhakemeye yönelik yapılan çalışmalar, öğrencilerin eşit işaretinin her iki yanında değişkenler bulunan denklemleri anlama ve çözmede zorluk yaşadıklarını (Filloy & Rojano, 1989; Herscovics & Linchevski, 1994; Humberstone & Reeve, 2008) ve anlamadıkları semboller üzerine anlamsız işlemleri yapmaya mecbur edildiklerini (Herscovics & Linchevski, 1994) ortaya koymaktadır. Bu başarısızlık Pirie ve Martin (1997)’e göre bilişsellikten ziyade uygun olmayan öğretimden kaynaklı olmasına karşılık, bilişsel (Herscovics & Linchevski 1994) ya da didaktik (Filloy & Rojano, 1989) bir kesinti olarak tanımlanabilir. Herscovics ve Linchevski (1994) aritmetik ve cebir arasında bir bilişsel kesintinin varlığını ortaya koyarak, bunun öğrencilerin bilinmeyenlerle işlem yapabilme yetersizlikleri olarak karakterize edilebileceğini belirtmiştir. Macgregor ve Stacey (1997), Wheatley (1995) cebirin temelini oluşturan değişken kavramı ele alınırken, kavramsal yönünün ihmal edilip, işlemsel yönünün vurgulandığını ve öğrencilerden konunun bağlamını dikkate almadan değişkenlerle bir takım işlemleri yapılabilmelerinin beklendiği ve dolayısıyla bir takım sorunların ortaya çıktığını ifade etmiştir (Akt. Kieran, 1992). Herscovics ve Linchevski (1994), matematikteki kavramların işlemsel ve yapısal anlam farklılıklarını aritmetikte cebirin kırılma noktası olarak görmektedir. Aritmetiksel kavramlardan cebirsel kavramlara geçişte önemli olan, süreç-nesne ikilemidir. Öğrenciler çeşitli süreçlerden geçerek zihinlerinde yeni bir kavram oluştururlar.

Carpenter ve diğ. (2000) ’ne göre, eşit işaretini doğru yorumlama cebir öğrenme için gereklidir çünkü cebirsel muhakeme öğrencilerin genellemeleri ifade ederken uygun şekilde kullanmalarına ve bu kavramı tam anlamalarına bağlıdır. Örneğin, denklemleri dönüştürme ve çözme becerisi öğrencilerin bir denklemin iki yanının denk ifadeler olduğunu ve her denklemin denk bir denkleme dönüştürülebileceğini anlamasını gerektirir (Kieran, 1981). Bununla birlikte, öğrenciler eşit işaretinin çeşitli anlamlarını bilmede, denklem çözümlerinde kullanmada, denk kesirleri anlamada zorluklar yaşamaktadır (Kieran, 1997; Knuth ve diğ., 2006; Saldanha & Kieran, 2005; Sfard & Linchevsky, 1994; Steinberg, Sleeman & Ktorza, 1990). Knuth ve diğ. (2005), Welder (2007), öğrencilerin bu dönemde eşit işaretini aritmetik bir denklik olmaktan çok operasyonel olarak gördüğünü destekleyen çok sayıda araştırmalar olduğunu belirtmektedir. Clement ve diğ. (1981), üniversite öğrencilerinin bile eşit işaretinin anlamına yönelik kavram yanlışları olduğunu ifade etmiştir. Kieran (1992), denklemler gibi yapısal temsilleri üretme ve yeteri derecede yorumlama için simetri kavramının ve eşitliğin değişken karakterinin bilinmesi gerektiğini belirtmiştir. Gattegno (1974), eşitliğin değişmeyen bir özelliği, aynılığı

vurguladığını ve bu yüzden sınırlı olduğunu ancak denklik kavramının daha çok algılanan ve esnek bir kavram oluşu açısından daha yararlı olduğunu ifade etmiştir (Akt. Kieran, 1981). Godfrey ve Thomas (2008), denklemin yapısal olarak aritmetik veya cebirsel temsil sisteminin nesneleri arasında matematiksel bir ilişkinin temsili olduğunu ve denklemi yapısal anlamının yolunun denklik kavramından geçtiğini belirtmiştir.

Sfard (1991)' a göre denklem kavramı, kavramın yapısal ve işlemsel taraflarının karmaşık bir etkileşimini barındırır ve işlemselden yapısalığa geçiş, öğretimsel bir destek olmadıkça sağlanamaz (Akt. Attorps, 2006). Bir öğretmen için didaktik problemlerden biri kesinlikle eşit işareti, denklemlere ve sembolik ifadelerle anlamlı durumlar aramaktır (Radford, 2002). Pirie ve Martin (1997), lineer denklemlerin çözümünde bilişsel zorluğun yöntem tarafından yaratıldığını belirtmiştir. Aritmetik ve cebir arasındaki bilişsel kesintiye köprü kurma gereksinimi duyan bilişsel süreç genişletilerek, çok daha fazla öğrencinin hatta cebirden kaçan öğrencilerin bile kazanılması sağlanabilir (Herscovics & Linchevski, 1994).

Literatür incelendiğinde denklem konusuna yönelik çalışmaların büyük oranda aritmetikten cebire geçiş sürecinde bulunan öğrencilerin değişken, eşitlik ve denklik kavramı algılamaları ile öğrencilerin bu denklemleri aritmetik bilgileri temelinde ne ölçüde çözebilecekleri ve bu yönde yapılan öğretimler üzerine odaklandığı görülmektedir. Ayrıca temel olarak 1. dereceden denklemler üzerinde durulmuştur. Bu çalışmada ise yapılan araştırmalardan farklı olarak rasyonel denklemler temel alınarak, öğrencilerinin rasyonel denklemleri çözme biçimleri ve bu süreçte yaptıkları hatalar, kavram yanlışları ve çözüm sürecinde karşılaştıkları zorlukları ortaya çıkarılmaya çalışılmıştır. Rasyonel denklemlerin alınmasındaki temel faktör; öğrencilerin bu tür denklemleri çözerken çok çeşitli hatalar yaptıklarının ve denklem kavramına yönelik literatüre yansımamış birtakım kavram yanlışlarına sahip olduklarının ortaya çıkarılması açısından bir potansiyel taşımasıdır.

YÖNTEM

Bu araştırmada, bir Anadolu lisesindeki öğrencilerin rasyonel denklemleri çözme biçimleri, çözüm süreçleri boyunca yaptıkları hatalar, kavram yanlışları ve karşılaştıkları zorluklar tespit edilmeye çalışılmıştır. Dolayısıyla araştırma, bir özel durum çalışması olup yöntemi niteldir.

Çalışma Grubu

Bu araştırmanın örneklemini, bir Anadolu lisesinin tesadüfi belirlenen iki 10. sınıf ve bir 11. sınıfından toplam 86 öğrencisi oluşturmaktadır. 8. sınıftan sonra yapılan bir seçme sınavında başarılı olan öğrenciler Anadolu liselerine

alınmaktadır. Dolayısıyla diğer liselerde okuyan öğrencilere göre matematiksel ön bilgileri ve düşünceleri genel olarak daha iyidir. Eğer hazırlanan sorular diğer lise öğrencilerine sorulmuş olsa, öğrencilerin rasyonel denklem çözümlerinde karşılaşacakları zorlukların çeşitliliğinin artması muhtemeldir. Bu zorluklar, rasyonel denklem çözümüyle daha yakından ilişkili matematiksel işlemlerde ortaya çıkabileceği gibi, aritmetiksel işlemlerde, 1. dereceden denklem çözümlerinde, payda eşitlemede, çarpmanın toplama üzerine dağılma özelliğini kullanma gibi daha geniş bir etkileyen kümesinde de ortaya çıkabilirdi. Oysaki araştırmanın amacı sadece rasyonel denklemlerin çözüm sürecini olumsuz etkileyen faktörleri daha dar bir çerçevede incelemektir. Ayrıca, eğer Anadolu lisesi öğrencileri rasyonel denklem çözümlerinde birtakım zorluklar ve kavram yanlışları ortaya koymuşsa, bu durumun diğer lise öğrencilerinde de görülmesi olasılığı oldukça yüksektir. Bu açıdan bakıldığında örneklem seçimini, amaçlı örnekleme yöntemlerinden “kritik durum örnekleme” olarak adlandırabiliriz. Kritik durum örneklemesinde “bu grup belirli bir problemle karşılaşıyorsa diğer bütün gruplar kesinlikle bu problemle karşı karşıya kalır” göstergesine sahip durumları incelemek amaçlanır (Yıldırım & Şimşek, 2004).

Veri Toplama Aracı

Ortaöğretim Matematik Programı ve çeşitli ders kitapları incelenerek rasyonel denklemlerle ilgili kapsam belirlenmiştir. Daha sonra bu kapsam çerçevesinde, okuldaki matematik öğretmenlerinin deneyimleri ve matematik eğitimi üzerine çalışan 2 öğretim elemanının görüşü alınarak öğrencilerin rasyonel denklem çözümlerinde kavram yanlışlarını ve hatalarını tespit edebilecek tarzda sorular hazırlanmıştır. Genel olarak bu tip denklemlerde, eşitliğin her iki yanında pay ve/veya paydada çarpım durumunda ortak çarpanlar bulunmaktadır. Soruların hazırlanmasında dikkat edilen bir diğer husus ise testin homojen olmasını sağlamak açısından, soruların matematiğin diğer kavramlarıyla çok fazla ilişkili olmamasını sağlamak olmuştur. Bu temelde, araştırmacı tarafından sade bir taslak test geliştirilmiştir. Bu testin geçerliğini saptamak amacıyla matematik eğitimi alanında çalışan 2 öğretim elemanına taslak gönderilerek, hataları saptamaya uygunluk açısından değerlendirmeleri istenmiştir. Bunun sonucunda dört denklem tipi ve birer temel örnekleri üzerinde ortak fikir sağlanmıştır. Bu denklem tipleri ve temel birer örnekleri şöyledir:

$$1) \frac{(ax+b)(cx+d)}{mx+n} = ax+b \rightarrow \frac{x^2-4}{2x+3} = x+2$$

$$2) \frac{ax^2+bx+c}{mx+n} = \frac{d}{mx+n} \rightarrow \frac{x^2-1}{x-2} = \frac{3}{x-2} \quad (mx+n, ax^2+bx+c-d' \text{ yi tam böler})$$

$$3) \frac{ax+b}{mx+n} = \frac{cx+d}{mx+n} \rightarrow \frac{3x-2}{x-2} = \frac{x+2}{x-2}, (mx+n), (a-c)x+(b-d)' \text{ yi tam böler.}$$

$$4) \frac{(ax+b)(cx+d)}{mx+n} = \frac{(ax+b)}{mx+n} \rightarrow \frac{x^2-4}{x-3} = \frac{x+2}{x-3}$$

Verilerin Analizi

Verilerin analizinde betimsel analiz yöntemi kullanılmıştır. Buna göre; verilerin kodlanması, bunların bütünleştirilerek ortak temaların yazılması ve öğrencilerin çözüm yöntemlerinin, karşılaştıkları zorlukların, yaptıkları hataların frekans ve yüzdeleri verilerle özetlenip yorumlanması, neden sonuç ilişkilerinin belirlenmesi, gereken yerlerde temaların ilişkilendirilmesi ve tahminlerde bulunulması işlemleri yapılmıştır.

Kodlama şemasının oluşturulmasında ve çözümlerin kodlanmasında güvenilirlik sağlanması açısından, bu sürece matematik eğitiminde çalışan bir öğretim elemanı dahil edilmiştir. Kodlanacak bilgiler matematiksel olduğundan, çok büyük oranda aynı kodların belirlendiği ve kodlamanın yapıldığı görülmüştür. Ortaya çıkan az sayıda farklılık ortak yargıya varılarak tek bir şekilde belirlenmiştir.

Denklemlerin çözümü sırasında yapılan işlemler kodlanırken öğrencinin, karşılaştığı 1., 2. veya 3. derece denklemi çözüp çözmemesi, verilen rasyonel denklemin paydasını sıfırlayan sayıyı, bulduğu çözüm kümesinden hariç tutup tutmadığı gibi hatalar dikkate alınmıştır. Çözüm yöntemleri kodlanırken ise öncelikle öğrencilerin çözümleri incelenmiş bu esnada yaptıkları kısaca not edilmiş, tüm öğrenciler için bu işlem tamamlandıktan sonra ise aynı olan çözüm yöntemlerine birer kod verilerek yanıtlar kodlanmıştır. Çözüm sürecinde kodlamayı belirleyen işlemler şu şekilde olmuştur: “Denklemden içler-dışlar çarpımı yapılması”, “Her iki taraftan pay kısmındaki aynı çarpanların yok edilmesi”, “ $(P/Q)=(R/Q)$ ifadesi $(P-R)/Q=0$, $M/Q=0$ ” yapıldıktan sonra (i) pay ve payda sadeleştirme (ii) M nin köklerini bulunması ya da yanlış bulunması, “ $(P/Q)=R$ ifadesini $(P/Q)-R=0$ ve payda eşitlemeden sonra $S.T/F=0$ formuna dönüştürerek çözülmesi”. Makalede yer yer “H yöntemi”

ifadesi kullanılmıştır. H yönteminden, eşitliğin bir yanındaki ifadenin diğer tarafa geçirilerek gereken payda eşitleme işlemlerinin yapılması ve ifadenin $(P/Q)=0$ biçimine dönüştürülmesi kastedilmektedir. Bu noktadan itibaren P polinomunun köklerinden Q polinomunun köklerinin hariç bırakılarak çözüm oluşturulur.

BULGULAR

Bu kısımda öğrencilerin rasyonel denklem tipleri çerçevesinde, kullandıkları çözüm yöntemleri, başarı oranları, başarısızlıklarının nedenleri hata ve karşılaşılan zorluklar temelinde yorumlama yapılmaksızın doğrudan veriler kullanılarak verilmiştir.

$$\frac{x^2-4}{2x+3} = x+2 \text{ (I) Rasyonel Denklem Çözümüne İlişkin Bulgular}$$

Bu denklemde sadece her iki tarafın pay kısmında bir ortak ifade bulunmaktadır. Öğrencilerin çözüm yöntemleri şunlardır:

a) İçler-dışlar çarpımı yöntemi: Bu denklemi çözmek için 86 öğrencinin 56'sı (%65)' sı içler-dışlar çarpımı yolunu izlemiştir. İçler-dışlar çarpımı sonucunda ortaya 2. dereceden bir denklem çıkar. Tüm öğrenciler denklemi doğru ortaya koyabilmiştir. 56 öğrenciden 48'i (%86) oluşan 2. dereceden denklemi doğru çözerek verilen rasyonel denklemin çözümü oluşturabilmiştir. Ancak, 5 öğrenci (%9) denklemi çözememiş, 3 öğrenci (%6) ise doğru çözdüğü halde elde ettikleri köklerden bazılarının verilen rasyonel denklemi sağlamadığını belirtmiştir.

b) Denklem pay kısımlarındaki ortak çarpanların yok edilmesi: 86 öğrencinin 23' ü (%27) denklemin her iki tarafından aynı çarpanları $(x+2)$ yok etmiştir. Bu durumda denklemi sağlayan kök de yok edilmiş olmaktadır. Ancak bu 23 öğrenciden 2'si (%9) çözüm kümesini yazarken yok ettikleri kökü de sonradan ilave ederek, çözüm kümesini doğru yazabilmiştir.

c) H yöntemi: 86 öğrenciden 7'si (%8) bu yolu izlemiş bunlardan 6'sı (%86), $S(x)=0$ denkleminin köklerini bularak çözümü oluşturabilmiş, 1 öğrenci ise (%14) bu yolu izlemiş ancak gereken işlemleri doğru yapamamıştır.

Sonuç olarak 30 öğrenci (%35) (I) tipindeki rasyonel denklemi çözememiştir. Bu 30 öğrencinin başarısız olmasında %83 oranında hatalar ve %17 oranında ise karşılaşılan zorluklar etkili olmuştur. Hataların %84' ü paydaki ortak çarpanların yok edilerek bu ifadeyi sıfır yapan sayının da çözüme alınmamasından ve %16'

sı ise aritmetik işlem hatalarından kaynaklanmaktadır. Karşılaşılan zorlukların tamamı ise 2. dereceden denklemin çözilememesinden kaynaklanmaktadır.

$$\frac{x^2-1}{x-2} = \frac{3}{x-2} \quad \text{(II) Rasyonel Denklemin Çözümüne İlişkin Bulgular}$$

a) İçler-dışlar çarpımı Yöntemi: Bu denklemi çözmek için 86 öğrencinin 27'si (%31) içler-dışlar çarpımı yolunu izlemiştir. İçler-dışlar çarpımı sonucunda ortaya 3. dereceden bir denklem çıkacaktır. 27 öğrenciden 19'u (%70) 3. dereceden denklemi çözememiştir. 4 öğrenci (%15) oluşan 3. dereceden denklemi doğru çözmüş ancak paydayı sıfırlayan sayıyı da çözüm kümesine kattıklarından verilen rasyonel denklemin çözüm kümesini doğru oluşturamamıştır. Diğer 4 öğrenci (%15) ise 3. dereceden denklemin köklerinden paydayı sıfırlayanları atarak doğru çözümü oluşturabilmiştir.

b) Denklemin Payda Kısımlarındaki ortak ifadelerin yok edilmesi: Bu denklemi çözmek için 86 öğrencinin 46'sı (%54) paydaları yok ederek işleme başlamıştır. Paydaların yok edilmesi durumunda ortaya çıkan 2. dereceden denklemin doğru çözülmesi ve paydayı sıfırlayan sayının hariç tutulmasıyla verilen rasyonel denklem çözülmüş olacaktır. 3 öğrenci (%7) 2. dereceden denklemi çözememiştir. 31 öğrenci (%67) bu 2. dereceden denklemi doğru çözmüş ancak paydayı sıfırlayan sayıyı hariç tutmadıklarından doğru bir çözüm oluşturamamıştır. 12 öğrenci (%26) ise denklemi doğru çözüp aynı zamanda paydayı sıfırlayan sayıyı hariç tutarak doğru çözüme ulaşmıştır.

c) H yöntemi: 86 öğrenciden 11 tanesi (%13) bu yolu izlemiştir. Bunlardan 8'i (%73) doğru çözüme ulaşabilmiştir. 2 öğrenci (%18) doğru çözüm sürecini uygulamış fakat paydayı sıfırlayan sayıyı da çözüme kattığı için, 1 öğrenci (%9) ise çözüm sürecinde oluşan 2. dereceden denklemi çözemediği için verilen rasyonel denklemi çözememiştir.

Sonuç olarak 62 öğrenci (%72) (II) tipindeki rasyonel denklemi çözememiştir. Yanıt veren 60 öğrencinin başarısız olmasında %62 oranında hatalar ve %38 oranında ise karşılaşılan zorluklar etkili olmuştur. Hataların tamamı çözüm kümesi yazılırken paydayı sıfır yapan $x=2$ sayısının hariç tutulmamasından kaynaklanmaktadır. Karşılaşılan zorlukların %83' ü 3. dereceden, %17'si 2. dereceden denklemin çözilememesinden kaynaklanmaktadır.

$$\frac{3x-2}{x-2} = \frac{x+2}{x-2} \quad \text{(III) Rasyonel Denkleminin Çözümüne İlişkin Bulgular}$$

a) İçler-dışlar çarpımı yöntemi: Bu denklemi çözmek için 86 öğrencinin 42'si (%49) içler-dışlar çarpımı yolunu izlemiştir. İçler-dışlar çarpımı sonucunda ortaya 2. dereceden bir denklem çıkacaktır. 4 öğrenci (%10) 2. dereceden denklemi doğru çözerek ve paydayı sıfırlayan sayıyı hariç tutarak verilen

rasyonel denklemi çözebilmiştir. 17 öğrenci (%41) 2. derece denklemi çözememiş, 21 öğrenci (%50) ise doğru çözmüş fakat paydayı sıfırlayan sayıyı da çözüm kümesine kattıklarından rasyonel denklemi doğru çözememişlerdir.

b) Denklemin payda kısımlarındaki ortak ifadelerin yok edilmesi: Bu denklemi çözmek için 86 öğrencinin 32'si (%37) paydaları yok ederek işleme başlamıştır. Paydaların yok edilmesi durumunda ortaya çıkan 1. dereceden denklemin doğru çözülmesi ve paydayı sıfırlayan sayının hariç tutulmasıyla rasyonel denklem çözülmüş olacaktır. Öğrencilerin tamamı bu 1. dereceden denklemi doğru çözmüş ancak 26 tanesi (%81) paydayı sıfırlayan sayıyı hariç tutmadıklarından doğru bir çözüm oluşturamamıştır. 6 öğrenci (%19) ise paydayı sıfırlayan sayıyı hariç tutarak doğru çözümü oluşturabilmiştir.

c) H yöntemi: 86 öğrenciden 11 tanesi (%13) bu yolu izlemiştir. Bunlardan 8'i (%73) doğru çözüme ulaşabilmiştir. 2 öğrenci (%18) paydayı sıfırlayan sayıyı hariç tutmayarak yanlış çözüm oluşturmuştur. 1 öğrenci (%9) ise son aşamada payda oluşan 1. derece denklemi çözemediğinden çözüme ulaşamamıştır.

Sonuç olarak 68 öğrenci (%79) (III) tipindeki rasyonel denklemi çözememiştir. Yanıt veren 67 öğrencinin başarısız olmasında %73 oranında hatalar ve %27 oranında ise karşılaşılan zorluklar etkili olmuştur. Hataların tamamı çözüm kümesi yazılırken paydayı sıfır yapan $x=2$ sayısının hariç tutulmamasından kaynaklanmaktadır. Karşılaşılan zorlukların %94' ü 2. dereceden, %6'sı 1. dereceden denklemin çözülmemesinden kaynaklanmaktadır.

$$\frac{x^2-4}{x-3} = \frac{x+2}{x-3} \quad \text{(IV) Rasyonel Denklemin Çözümüne İlişkin Bulgular}$$

a) İçler-dışlar çarpımı yöntemi: Bu denklemi çözmek için 86 öğrencinin 28'i (%33) içler-dışlar çarpımı yolunu izlemiştir. 2 öğrenci (%7) rasyonel denklemi bu yolla çözebilmiştir. 25 öğrenci (%89) içler-dışlar çarpımı sonucunda ortaya 3. dereceden denklemi çözemediğinden, 1 öğrenci (%4) ise doğru çözdüğü halde paydayı sıfırlayan sayıyı da çözüme kattığından verilen rasyonel denklemi doğru çözememişlerdir.

b) Denklemin paydasındaki ortak ifadelerin yok edilmesi: Öğrencilerin 28'i (%33) paydaları yok ederek işleme başlamıştır. Paydaların yok edilmesi durumunda ortaya çıkan 2. dereceden bir denklem çıkacaktır. Bu denklemin köklerinin bulunarak doğru çözülmesi ve bunların içinden paydayı sıfırlayan sayının hariç tutulmasıyla rasyonel denklem çözülmüş olacaktır. 5 öğrenci (%18) doğru çözümü oluşturabilmiştir. 2 öğrenci (%7) oluşan 2. dereceden denklemi çözemediğinden, 21 öğrenci (%75) bu 2. dereceden denklemi doğru çözmüş ancak paydayı sıfırlayan sayıyı hariç tutmadıklarından doğru bir çözüm oluşturamamıştır.

c) Her iki taraftan pay ve paydalardaki ortak çarpanların yok edilmesi: Öğrencilerin 14' ü (%16) bu yolu izlemiştir. Bu işlemin sonunda ortaya " $x-2=1$ " denklemi çıkacaktır. 1 öğrenci (%7) sadeleştirmelerin sonucunda eşitliğin sağ kısmında ne kaldığına karar veremeyip işlemi bırakmış, 7 öğrenci (%50) sağ kısımda kalanın sıfır olduğunu düşünmüş ve çözümü 2 olarak belirlemiş, 5 öğrenci (%36) " $x-2=1$ " denklemi ortaya koyarak çözmüş ancak $x=3$ sayısını çözüm olarak yazmıştır. 1 öğrenci (%7) ise " $x-2=1$ " denklemi ortaya koyarak çözmüş ve $x=3$ paydayı sıfır yaptığı için çözüm kümesine almamış ve çözüm kümesini boş küme olarak belirtmiştir. Sonuç olarak bu yöntemi uygulayan her öğrenci başarısız olmuştur. Bu durumda bu kategorideki öğrencilerin rasyonel denklemin payında bulunan ortak ifadelerin sadeleştirilmesi sonucunda çözüme alınmaması hatasını da yaptıkları açıktır.

d) H yöntemi: 86 öğrenciden 12' si (%14) bu yolu izlemiştir. 10 öğrenci (%83) rasyonel denklemi doğru çözmüştür. 2 öğrenci (%17) ise paydayı sıfırlayan sayıyı hariç tutmadığı için verilen rasyonel denklemin çözüm kümesini doğru ortaya koyamamıştır.

Sonuç olarak 69 öğrenci (%80) (IV) tipindeki rasyonel denklemi çözememiştir. Yanıt veren 65 öğrencinin başarısız olmasında %58 oranında hatalar ve %42 oranında ise karşılaşılan zorluklar etkili olmuştur. Karşılaşılan zorlukların %93' ü 3. dereceden, %7' si 2. dereceden denklemin çözülememesinden kaynaklanmaktadır. Hataların %18' i denklemde ortak çarpanların karşılıklı yok edilmesi sonucunda bir tarafta geride bir ifade kalmaması durumunda sıfır yazılmasından, %3' ü ise herhangi bir sayı koymamasından, %79' u denklemin payında bulunan ortak çarpanların karşılıklı yok edilmesi sonucunda bu ifadenin kökünün çözüme alınmamasından ayrıca paydayı sıfırlayan sayının çözüme katılmasından kaynaklanmaktadır.

Veriler incelendiğinde verilen rasyonel denklemlerin çözümünde ortalama %34 oranında başarılı olduğu tespit edilmiştir. Öğrencilerin hangi tip rasyonel denklemde hangi yolu izledikleri ve başarı oranları Çizelge 1'de verilmiştir.

Çizelge 1. Rasyonel denklem çözümünde kullanılan yöntemler ve başarı oranları

	Tip I		Tip II		Tip III		Tip IV	
	Tercih	Başarı	Tercih	Başarı	Tercih	Başarı	Tercih	Başarı
İçler-dışlar çarpımı	%65	%86	%31	%15	%49	%10	%33	%7
Paydalarda yok etme	%27	%9	%54	%26	%37	%19	%33	%18
H	%8	%86	%13	%73	%13	%73	%14	%88
Pay ve paydalarda yok etme							%16	%0

Çizelge 1 incelendiğinde, genellikle rasyonel denklem çözümlerinde içler dışlar çarpımı kullanıldığı; Denklemin pay kısımlarındaki ortak çarpanların yok edilmesi sonucunda başarı oranı oldukça düşük olduğu (ortalama %23) görülmektedir. Bunların yanında şu hususlar da ortaya çıkmaktadır.

İçler dışlar çarpımı yöntemi sadece 1. tip denklemlerde en az hataya veya zorluğa yol açmaktadır. Öğrencilerin içler dışlar çarpımı yöntemini kullanarak 1. tip denklem haricindeki rasyonel denklem çözümlerinde başarısız olmalarında fark yaratan nedenler araştırıldığında, bunun 3. dereceden veya 2. dereceden denklemin çözüm sürecindeki başarısızlıktan kaynaklandığı tespit edilmiştir.

H yöntemi esnasında diğer yöntemlere nazaran daha fazla matematiksel iş sözü konusu olduğundan, fazla tercih edilmemekte ancak tercih edilmesi durumunda en az hata veya zorluk ortaya çıkmaktadır. Bunun nedeni araştırıldığında bu yöntemin uygulanmasının, öğrencilerin başarısız olmasındaki en önemli faktörler olan payı yok etme ve paydayı sıfırlayan sayıyı çözüm dışında tutmama hatalarını çok büyük oranda önlemesinden kaynaklandığı görülmüştür.

Rasyonel bir denklemde eşitliğin her iki yanında pay ve paydalarında çarpım durumunda bulunan ortak ifadelerin karşılıklı yok edilmesi durumunda başarı oranı %0'dır. Bu son iki maddede ortaya çıkan başarısızlığın nedeni denklemin her iki yanında çarpım durumunda bulunan ortak ifadelerin yok edilerek bu ifadeleri sıfır yapan sayıların aynı zamanda rasyonel denklemin de bir çözüm elemanını oluşturduğunun fark edilmemesinden kaynaklanmaktadır.

Yapılan hatalar genel olarak incelendiğinde, ortalama %82 oranında denklemin pay kısımlarındaki ortak çarpım ifadelerinin yok edilerek (I. ve IV. tip) bu ifadeyi sıfır yapan sayının rasyonel denklemin çözüm kümesine dahil edilmemesinden, %100 oranında ise paydayı sıfır yapan sayının çözüm kümesi dışında bırakılmamasından (II. ve III. tip) kaynaklandığı tespit edilmiştir. Öğrencilerin karşılaştıkları zorluklar incelendiğinde, %88 oranında 3. dereceden, %43 oranında ise 2. dereceden denklemin çözüm sürecinde ortaya çıktığı belirlenmiştir.

TARTIŞMA VE SONUÇ

Bu çalışma Anadolu Lisesi öğrencileriyle yapılmıştır. Bilindiği gibi Anadolu Lisesi öğrencileri belli bir sınav sonucunda başarılı olan öğrencilerden oluşmaktadır ve matematik becerileri diğer öğrencilere göre belirgin ölçüde daha yüksektir. Dolayısıyla araştırmada kullanılan sorular başka lise öğrencilerine uygulanırsa, karşılaşılan zorlukların çeşitliliğinin ve oranlarının artması öngörülebilir. Hataların ise büyük oranda aynı şekilde ortaya çıkacağı ancak oranlarının daha yüksek olacağı da muhtemeldir.

Rasyonel denklem çözme sürecinde yapılan en önemli hata, rasyonel denklemde yer alan rasyonel ifadenin paydasını sıfır yapan sayının çözüm kümesi dışında bırakılmamasından kaynaklanmaktadır. Akgün ve Özdemir (2006) tarafından değişkenler üzerine yapılan bir araştırmada da öğrencilerin denklemini çözerken genellikle paydayı sıfır yapan sayıyı da çözüme katkılarını belirlenmiştir. Öğrenci verilen rasyonel denklemde içler dışlar çarpımı, ortak payda eşitleme

gibi doğru bir işlem yapıp yine doğru işlemlerle örneğin 2. dereceden bir denkleme ulaşıyor ve bunu doğru çözüp çözüm kümesini yazıyor. Dolayısıyla eriştiği çözümün verilen rasyonel denklemin kesin bir çözümü olup olmadığı noktasında belki de bir endişe duymuyor olabilir. Bu anlamda bulduğu çözüm elemanlarını olası çözüm elemanları olarak görmediği, rasyonel denklemde yerine yazılması veya paydayı sıfır yapması açısından denklem ve çözüm kümesi kavramları temelinde anlamlı olarak değerlendiremediği düşünülebilir.

Rasyonel denklem çözme sürecinde yapılan ikinci önemli hata, eşitliğin her iki yanında çarpım durumunda bulunan ortak ifadelerin yok edilerek bu ifadeyi sıfır yapan sayının rasyonel denklemin çözüm kümesine katılmamasıdır. Bilindiği gibi bir eşitliğin her iki yanına aynı işlem yapılırsa (sıfırla bölme hariç), eşitlik bozulmaz. Aritmetikten cebire geçiş sürecinde denklem çözümlerinde bu yöntemin anlaşılması oldukça önemlidir ve denklem çözümlerinde çokça vurgulanır. Dolayısıyla öğrencilerin, rasyonel denklem çözümlerinde de eşitliğin her iki tarafındaki çarpım ya da bölüm durumundaki aynı ifadeyi karşılıklı yok ettiklerinde, bu operasyonun denklemin çözümüne olumsuz bir etki yapmayacağını düşünmüş olmaları, bu hatayı yapmalarının bir nedeni olabilir. Yani öğrencilerin eşitlik kavramı anlamalarının, denklemde görülen eşitlik işaretinden dolayı rasyonel denklem çözümlerine de transfer edilmesi bu tür bir hatanın kaynağı olabilir. Ön bilgilerin bazen yeni kavramların öğrenilmesinde yanlış öğrenmelere neden olabileceği bilinmektedir. Bell ve Baki (1997) tarafından da belirtildiği gibi bir problemin çözümü veya bir işlemin yürütülmesi öğrencinin mantığına, önceki birikimlerine uygun düşebilir ve yaptıklarının matematiksel geçerliliğinin olmadığını da bilmeyebilir. İşte bu durumda kavram veya işlem yanlışlarının gelişmesi söz konusudur. Bu tür yanlışlara örnek olarak çarpmanın sonucu her zaman artırdığı düşüncesi verilebilir. Doğal sayılarda doğru olan bu düşünce, çarpma işlemi reel sayılara genişletildiğinde rahatlıkla kavram yanlışısına dönüşebilir.

Diğer taraftan ortaya çıkan diğer bir kayda değer hata, rasyonel denklemlerde sadeleştirmenin sonucunda eşitliğin bir yanında geride bir ifade kalmaması durumunda sıfır yazılmasıdır. Yokluğun ilkokuldan itibaren sıfır ile simgeleştirilmesi bu durumdaki öğrenciler için bu durumu açıklayabilir. Öğrencilerin karşılaştıkları zorluklar incelendiğinde, %88 oranında 3. dereceden, %43 oranında ise 2. dereceden denklemin çözüm sürecinde ortaya çıktığı belirlenmiştir. Akgün ve Özdemir (2006) tarafından değişkenler üzerine yapılan bir araştırmada da öğrencilerin kesirlerle hatalı aritmetik hesaplamalar sonucu denklemi 2. dereceden denkleme dönüştüremedikleri tespit edilmiştir. Bu durum öğrencilerin bilinmeyenlerle işlem yapmada ve basit aritmetik işlemlerdeki hata ve zorluklarından kaynaklanabilir.

H yöntemi (eşitliğin bir yanını diğer tarafa geçirerek sıfıra eşitleme ve diğer tarafta payda eşitleme yapılarak işlemin sürdürülmesi) esnasında diğer yöntemlere nazaran daha fazla matematiksel iş söz konusu olduğundan, fazla

tercih edilmemekte ancak tercih edilmesi durumunda en az hata veya zorluk ortaya çıkmaktadır. Bunun nedeni araştırıldığında bu yöntemin uygulanmasının, öğrencilerin başarısız olmasındaki en önemli faktörler olan payı yok etme ve paydayı sıfırlayan sayıyı çözüm dışında tutmama hatalarını çok büyük oranda önlemesinden kaynaklandığı görülmüştür. Ancak, Hoch ve Dreyfus (2004), çoğu öğrencinin cebirsel kesirli denklemlerde öğrencilerin ortak payda ile çarpma işlemi yaparak hataya meyilli ve uzun bir çözüme gittiklerini belirtmiştir. Bu iki bulgu çelişmektedir. Bu durum çalışma grubundaki öğrencilerin matematiksel yeteneklerinin farklılığından kaynaklanabilir.

KAYNAKLAR

- Akgün, L. ve Özdemir, M. E. (2006). Students understanding of the variable as general number and unknown: A case study. *The Teaching of Mathematics*, 9(1), 45-51.
- Akkaya, R. (2006). *İlköğretim altıncı sınıf öğrencilerinin cebir öğrenme alanında karşılaşılan kavram yanlışlarının giderilmesinde etkinlik temelli yaklaşımın etkiliği*. Yayınlanmamış yüksek lisans tezi, Abant İzzet Baysal Üniversitesi Sosyal Bilimleri Enstitüsü, Bolu.
- Akkaya, R. ve Durmuş, S. (2006). İlköğretim 6–8. sınıf öğrencilerinin cebir öğrenme alanındaki kavram yanlışları. *Hacettepe Üniversitesi Eğitim Fakültesi Dergisi*, 31, 1-12.
- Andrews, P. (2011). *The teaching of linear equations: Comparing effective teachers from three high achieving European countries*. Paper presented at the Seventh Congress of the European Society for Research in Mathematics Education (CERME 7), Rzeszów, Poland.
- Arcavi, A. (2005). Developing and using symbol sense in mathematics. *For the Learning of Mathematics*, 25(2), 50-55.
- Attorps, L. (2006). *Mathematics teachers' conceptions about Equations*. Unpublished doctoral dissertation, University of Helsinki, Helsinki.
- Bayar, H. (2007). *1. dereceden bir bilinmeyenli denklem konusundaki öğrenci hatalarının analizi*. Yayınlanmamış yüksek lisans tezi, Balıkesir Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Balıkesir.
- Bazzini, L. & Tsamir, P. (2004). Algebraic equations and inequalities: Issues for research and teaching. *Paper presented at the Proceedings of the 28th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, Bergen, Norway.
- Bell, A. ve Baki, A. (1997). *Ortaöğretim matematik öğretimi (Cilt I)*. Ankara: YÖK.
- Carpenter, T. P., Levi, L. & Farnsworth, V. (2000). Building a foundation for learning algebra in the elementary grades. *In Brief*, 1(2), 1-6.
- Clement, J., Lochhead, J. & Monk, G. (1981). Translation difficulties in learning mathematics. *American Mathematical Monthly*, 88, 286-90.
- Clement, J. (1982). Algebra word problem solutions: thought processes underlying a common misconception. *Journal for Research in Mathematics Education*, 13, 16-30.
- Dede, Y., Yalın, H. ve Argün, Z. (2002). *İlköğretim 8. sınıf öğrencilerinin değişken kavramının öğrenimindeki hataları ve kavram yanlışları*. Paper presented at the UFBMEK, ODTÜ, Ankara.
- English, L. D. & Halford, G. S. (1995). *Mathematics education: Models and processes*. Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum.
- English, L. D. & Warren, E. (1998). Introducing the variable through pattern exploration. *The Mathematics Teacher*, 91(2), 166-171.
- Erbaş, A. K. (1999). *An investigation into students' performances, difficulties and misconceptions in elementary algebra*. Yayınlanmamış yüksek lisans tezi, Middle East Technical University, Ankara.

- Ersoy, Y. & Erbaş, K. (2002). *Dokuzuncu sınıf öğrencilerinin eşitliklerin çözümündeki başarıları ve olası kavram yanlışları*. Paper presented at the V. Ulusal Fen Bilimleri ve Matematik Eğitimi Kongresi, 16-18 Eylül, ODTÜ, Ankara.
- Ertekin, E. (2002). *Denklemlerin öğretimindeki yanlışların teşhisi ve sebeplerinin belirlenmesi*. Yayınlanmamış yüksek lisans tezi, Selçuk Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Konya.
- Filloy, E. & Rojano, T. (1989). Solving equations: The transition from arithmetic to algebra, *For the Learning of Mathematics*, 9(2), 19-25.
- Filloy, E., Rojano T. & Puig, L. (2008). *Educational Algebra. A theoretical and empirical approach*. Berlin Heidelberg, New York: Springer.
- Godfrey, D. & Thomas, M. O. J (2008). Student perspectives on equation: The transition from school to university. *Mathematics Education Research Journal*, 20(2), 71-92.
- Gray, E. & Tall, D. (1994). Duality, ambiguity and flexibility: A proceptual view of simple arithmetic. *Journal For Research in Mathematics Education*, 26(2), 115-141.
- Herscovics, N. & Kieran, C. (1980). Constructing meaning for the concept of equation. *The Mathematics Teacher*, 73, 572-580.
- Herscovics, R. & Linchevsky, L. (1991). Crossing the didactic cut in algebra: grouping like terms in an equation. In R. G. Underhill (Ed.), *Proceedings of the 13th Annual Meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, 1, 196-202.
- Herscovics, N. & Linchevski, L. (1994). A cognitive gap between arithmetic and algebra. *Educational Studies in Mathematics*, 27(1), 59-78.
- Hoch, M. & Dreyfus, T. (2004). *Structure sense in high school algebra: The effect of brackets*. Paper presented at the 28th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics, Bergen, Norway.
- Humberstone, J. & Reeve, R. A (2008). Profiles of algebraic competence. *Learning and Instruction*, 18, 354-367.
- Kieran, C. (1981). Concepts associated with the equality symbol. *Educational Studies in Mathematics*, 1, 317-326.
- Kieran, C. (1992). The learning and teaching of school algebra. In D.A. Grouws (Eds.). *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning* (pp. 390-419). New York: Macmillan.
- Kieran, C. (1997). Mathematical concepts at the secondary school level: the learning of algebra and functions. In T. Nunes and P. Bryant (Eds.), *Learning and teaching mathematics: an international perspective*. (pp. 133-158). East Sussex: Psychology Press.
- Kieran, C. & Sfard, A. (1999). Seeing through symbols: The case of equivalent expressions. Focus on learning problems in mathematics. *Center for Teaching/Learning of Mathematics*, 21(1), 1-17.
- Knuth, E., J., Alibali, M., W., McNeil, N., M., Weinberg, A. & Stephens, A., C. (2005). Middle school students' understanding of core algebraic concepts: equivalence & variable, *ZDM*, 37(1), 68-76.
- Knuth, E. J., Stephens, A. C., McNeil, N. M. & Alibali, M. W. (2006). Does understanding the equal sign matter? Evidence from solving equations. *Journal for Research in Mathematics Education*, 37, 297-312.

- Koedinger, K. R., & MacLaren, B. A. (1997). Implicit strategies and errors in an improved model of early algebra problem solving. In Cognitive Science Society (Ed.). *Proceedings of the 19th Annual Conference*, 382-387. Hillsdale, NJ: Erlbaum.
- Linchevski, L. & Livneh, D. (1999) Structure sense: The relationship between algebraic and numerical contexts. *Educational studies in mathematics*, 40, 173-196.
- Linchevski, L. & Herscovics, N. (1996). Crossing the cognitive gap between arithmetic and algebra: Operating on the unknown in the context of equations. *Educational Studies in Mathematics*, 30(1). 39-65.
- Laughbaum, E. (2003). Developmental Algebra with Function as the Underlying Theme. *Mathematics and Computer Education*. 37(1), 63-71.
- MacGregor, M. & Stacey, K. (1997a). Students' Understanding of Algebraic Notation: 11-15. *Educational Studies in Mathematics* 33: 1-19.
- MacGregor, M. & Stacey, K. (1997b). Ideas about symbolism that students bring to algebra. *The Mathematics Teacher*, 90(2), 110-113.
- McNeil, N. M. & Alibali, M. W. (2004). You'll see what I mean: students encode equations based on their knowledge of arithmetic. *Cognitive Science*, 28, 451-466.
- McNeil, N. M. & Alibali, M. W. (2005). Why won't you change your mind? Knowledge of operational patterns hinders learning and performance on equations. *Child Development*, 76, 883-899.
- Pope, L. (1994). *Teaching algebra. mathematics education: A handbook for teachers*. Elsington College of Education: New Zealand.
- Payne S. J. & Squibb, H. R. (1990). Algebra mal-rules and cognitive account of error. *Cognitive Science*, 14, 445-481.
- Perso, T. (1992). *Overcoming misconceptions in algebra: Using diagnostic teaching*. Subiaco W.A: The Mathematical Association of Western Australia (INC).
- Philipp, R. A. (1992). The many uses of algebraic variables. *Mathematics Teacher*, 85(7), 557-561.
- Pirie, S. & Martin, L. (1997). The equation, the whole equation and nothing but the equation! one approach to the teaching of linear equations. *Educational Studies in Mathematics*, 34, 159-181.
- Radford, L. (2002). Artefacts, symbols and equations in the classroom. *Mediterranean Journal for Research in Mathematics Education*, 1(1), 31-56.
- Rojano, T. & Martínez, M. (2009). *From concrete modeling to algebraic syntax: Learning to solve linear equations with a virtual balance model*. In Swars, S.L., Stinson, D.W., & Lemons-Smith, S. (Eds). Paper presented at the Proceedings of the 31st Annual Meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, Atlanta, GA.
- Saldanha, L. & Kieran, C. (2005). *A slippery slope between equivalence and equality: Exploring students' reasoning in the context of algebra instruction involving a computer algebra system*. Paper presented at the Proceedings of the 27th annual meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, Roanoke, VA.

- Schappelle, B. & Philipp, R. (1999). Algebra as generalized arithmetic: Starting with the known for a change. *The Mathematics Teacher*, 92(4), 310-316.
- Sfard, A. & Linchevsky, L. (1994). The gains and the pitfalls of reification. The case of Algebra. *Educational Studies in Mathematics*, 26, 191-228.
- Slavitt, D. (1999). The role of operation sense in transitions from arithmetic to algebraic thought. *Educational Studies in Mathematics*, 37, 251-274.
- Stacey, K., & MacGregor, M. (1999). Learning the algebraic method of solving problems. *Journal for Research in Mathematics Education*, 18, 149-167.
- Stacey, K. & Macgregor, M. (2000). Learning the algebraic method of solving problems. *Journal of Mathematical Behaviour*, 18(2), 149-167.
- Steinberg, R. M., Sleeman, D. H. & Ktorza, D. (1990). Algebra students' knowledge of equivalence of equations. *Journal for Research in Mathematics Education*, 22(2), 112-121.
- Stephens, A. C. (2003). Another look at word problems. *Mathematics Teacher*, 96(1), 63-66.
- Vlassis, J. (2002). The balance model: Hindrance or support for the solving of linear equations with one unknown. *Educational Studies in Mathematics*, 49, 341-359.
- Wagner, S. (1983). What are these things called variables? *Mathematics Teacher*, 76, 474-478.
- Warren, E. (2003). The role of arithmetic structure in the transition from arithmetic to algebra. *Mathematics Education Research Journal*, 15(2), 122-137.
- Welder, R. M. (2006, January). *Prerequisite knowledge for the learning of algebra*. Paper presented at the Conference on Statistics, Mathematics and Related Fields, Honolulu, Hawaii.
- Welder, R. M. (2007). *Preservice elementary teachers' mathematical content knowledge of prerequisite algebra concepts*. Unpublished doctoral dissertation, Montana State University Bozeman, Montana.
- Yıldırım, A. ve Şimşek, H. (2004). *Sosyal bilimlerde nitel araştırma yöntemleri*. Ankara: Seçkin Yayıncılık.

EXTENDED ABSTRACT

When examining the literature, it has been seen that most of the studies on equations have been focused on the students' perceptions of equality and variable during the process of transition from arithmetic to algebra. Besides, these studies have generally dealt with basic first degree equations. In this research, high school students' misconception and error while solving rational equations. The main factor motivating doing this research was that it has been observed that many high school students made mistakes and had misconception about rational equations and therefore it has been thought that some misconceptions which don't exist in the literature would be introduced.

This paper has been done to determine students' solving methods of rational equations, errors and misconceptions in solving rational equations. A total of 86 students from 10th and 11th grades in Ankara were chosen randomly. Four rational equations with different forms containing general students' error and misconceptions in rational equations were prepared. Coding of solutions was done through a coding schema obtained the data and descriptive analysis was used. The students' errors and misconceptions have been determined and interpreted on the basis of their solving methods.

The content regarding the rational equations has been determined by examining Secondary Mathematics Curriculum and various school books. Then, in the frame of that content and on the basis of mathematics teachers' experiences and by taking two academic persons' thoughts, who are in mathematics education, a question list has been prepared. In general, in those sorts of equations, there are common factors in the numerator and denominator on the both sides of equation. Another point taken into consideration while preparing the questions in terms of ensuring that the test is homogeneous has been that the questions were not related to other concepts in mathematics so much. On the basis of this, a draft list of question has been prepared. In order to determine the validity of the test, that draft has been send to two academicians in mathematics education and asked for them to evaluate it in terms of determining some errors and misconceptions in solving rational equations. At the end of this process, there has been a consensus for four equation style and one basic example question for each style, which are below.

$$1) \frac{(ax+b)(cx+d)}{mx+n} = ax+b \rightarrow \frac{x^2-4}{2x+3} = x+2$$

$$2) \frac{ax^2+bx+c}{mx+n} = \frac{d}{mx+n} \rightarrow \frac{x^2-1}{x-2} = \frac{3}{x-2} \quad (mx+n \text{ is a factor of } ax^2+bx+c-d)$$

$$3) \frac{ax+b}{mx+n} = \frac{cx+d}{mx+n} \rightarrow \frac{3x-2}{x-2} = \frac{x+2}{x-2}, \quad (mx+n) \text{ is a factor of } (a-c)x+(b-d).$$

$$4) \frac{(ax+b)(cx+d)}{mx+n} = \frac{(ax+b)}{mx+n} \rightarrow \frac{x^2-4}{x-3} = \frac{x+2}{x-3}$$

The results showed that “cross products”, “eliminating the same factors on numerator or denominator of both sides “ and “moving one side of the equation to another side then multiplying by a common denominator” were common solving strategies. Solving 2nd or 3rd equations and arithmetical operations on algebraic rational expressions are the difficulties encountered. On the basis of perception of equality concept, by eliminating the same factors on numerators of both sides and not putting the numbers making the denominator zero into solution were common misconception. Another misconception was on the basis of matching the absence with zero. Some students have written zero in the case of nothing remained in the one side of the equation in the result of eliminating the same factors in the equation. The most important error in the process of solving rational equation has been arisen from not excluding the numbers making the denominator zero from the solution set. Besides, encountering a 2nd or 3rd equation in the process of solving the rational equation given has been determined a difficulty.

YAZAR HAKKINDA

Yrd. Doç. Dr. Alattin Ural, 1995 yılında Selçuk Üniversitesi Eğitim Fakültesi Matematik Öğretmenliği bölümünden mezun oldu. 1999 yılında Balıkesir Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsünden Matematik alanında master derecesi, 2007 yılında Gazi Üniversitesi Eğitim Bilimleri Enstitüsünden Matematik eğitimi alanında doktora derecesi aldı. 1995-2008 arası MEB' e bağlı çeşilli kademe ve türdeki okullarda öğretmenlik yaptıktan sonra Mehmet Akif Ersoy Üniversitesi Eğitim Fakültesi Matematik Anabilim dalında göreve başladı ve halen aynı yerde anabilim dalı başkanı olarak çalışmakta. / Mehmet Akif Ersoy Üniversitesi, Eğitim Fakültesi İlköğretim Matematik Öğretmenliği Anabilim Dalı, İstiklal Yerleşkesi, 15100 Burdur. /Eposta: altnurl@gmail.com

ABOUT THE AUTHOR

He has obtained BEd degree from Selçuk University Education Faculty, Mathematics Teacher Education Program in 1995, MSc from Balıkesir University Institute of Science Department of Mathematics in 1999, PhD degree from Gazi University, The Institute of Educational Sciences, Secondary Mathematics Education Dept. in 2007. He worked for various school as mathematics teacher from 1995-2008, and has been working for Mehmet Akif Ersoy Univ. since 2008 in Mathematics Education department. / Correspondence Address: Mehmet Akif Ersoy Üniversitesi, Eğitim Fakültesi İlköğretim Matematik Öğretmenliği Anabilim Dalı, İstiklal Yerleşkesi, 15100 Burdur. /Email: altnurl@gmail.com

